1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & a+1 & a\\ a & 6 & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+2y+z=3\\ 2x+(a+1)y+az=3\\ ax+6y+4z=a+3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4)-A(1))\cdot A(a)=A(a)\cdot(A(4)-A(1))$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Pentru $a=-1$ și $b=-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ a-3 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1 & -2\\ a-1 & -1 & 1\\ 2a & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(2a+1)x+y-2z=a\\ (a-1)x-y+z=a+1\\ 2ax-2y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care există y_0 și z_0, numere reale, astfel încât $(2,y_0,z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-9$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

5p **c)** Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\dfrac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ 2x+(m+1)y+z=2 \\ x+y+(m+1)z=m+1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, sistemul de ecuații are cel mult o soluție.

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+y+mz=4 \\ 4x+y+mz=6 \\ x-my-z=-1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.